素粒子のヤンミルズ場理論におけるカオス(基研短期研究会「非線形力学系の基本問題」,研究会報告)

AUTHOR(S):

河辺, 哲次; 太田, 正之輔

素粒子のヤンミルズ場理論におけるカオス

九州芸工大　河辺哲次

九大教養　太田正之輔

ヤンミルズ場の可積分性の問題は、クォークの閉じ込め問題への新しいアプローチとして興味がもたれている。特に、場が空間に依存しない場合は、ヤンミルズ古典力学として知られており、その解のカオス的性質はいろいろな観点から７０年代の終わり頃から十分に調べられてきた。しかしながら、空間依存性を持つ場合やさらに物質場（ヒッグス場）を含むより現実的な系に対する研究はほとんど解明されていない。

本研究会では、ヤンミルズ古典力学の簡単な紹介と、ヤンミルズ場が時空間に依存する場合、さらに、ヒッグス場が存在する場合の解析結果の報告を行った。

１．ヤンミルズ系

１－１．ヤンミルズ古典力学：場が時間だけに依存する場合[1)]

ヤンミルズ場をA^a_μとすればラグランジアンは場の強さ$F_{\mu\nu}$で次のように書ける：

$$L = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{a\mu\nu} \tag{1}$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - e\,\varepsilon^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{2}$$

この時、運動方程式は

$$\partial_\mu F^a_{\mu\nu} - e\,\varepsilon^{abc} A^b_\mu F^c_{\mu\nu} = 0 \tag{3}$$

となる。ここで、$a=1,2,3$, μ、$\nu=0,1,2,3$である。ゲージを$A^a_0=0$ととる。

一様な空間を仮定（$A^a_i(t)$）すると（３）は次の様なハミルトン系になる：

$$H = \frac{1}{2}\dot{A}^a_i \dot{A}^a_i + \frac{e^2}{4}\left[(A^a_i A^a_i)^2 - (A^a_i A^a_j)^2\right] \tag{4}$$

これを、SU(2)ヤンミルズ古典力学という。ガウスの法則を満たすようなアンザッツ

$A^a_i = O^a_i f^a(t)$, $O^a_i O^b_i = \delta^{ab}$(但し、$O^a_i$は時間に依存しない直交行列でａの和はとらない)

を課し、より簡単な３自由度の力学系にする。

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + \frac{1}{2}(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \qquad (5)$$

ここで　$x=f^1$, $y=f^2$, $z=f^3$ はヤンミルズ場の振幅である。

この系は図１の様なポテンシャル内での質点の運動で与えられる。この力学系のポアンカレ断面には固定点やＫＡＭ曲線は存在せずカオティックである。リアプノフ指数やパンレブの方法などによって、ヤンミルズ古典力学は非可積分系であり、強いストカスティシティを持つコルモゴロフのＫ系であることが示されている。

１－２．古典的ヤンミルズ場理論：場が時空間に依存する場合[2)]

時間依存性を持ったウー・ヤン・アンザッツ

$$A_i^a = -\varepsilon_{aij} r_j \frac{1-\varphi(r,t)}{e r^2} \qquad (6)$$

のもとで（３）は１＋１次元の場の理論と等価になる：

$$\partial_t^2\varphi - \partial_r^2\varphi = -\frac{1}{r^2}\varphi(\varphi^2-1) \qquad (7)$$

この系に、５個の有限な定常解が存在することは、（７）の相図から分かるが、特に興味があるのはウー・ヤン・モノポール解 $\varphi=0$ である。

この系の可積分性をFermi-Pasta-Ulamの方法で調べる。即ち、弦の運動を非線形振動子として離散化し、振幅をモード展開して、モード間のエネルギー分布を調べる。モード間のエネルギー交換が周期的であれば、系はレギュラーで不変　ＫＡＭ　トーラス上に存在するが、等分配的であればエルゴティックである。（５）を離散化する：

$$\ddot{\varphi}_i = \frac{\varphi^2_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} - \frac{\varphi_i(\varphi_i^2-1)}{(ih)^2} \qquad (8)$$

$$\varphi_i = \varphi(i, t) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{i=1}^{N-1} \phi_j(t) \sin\frac{\pi i j}{N} \qquad (9)$$

ここで、ｈは空間きざみの大きさ、Ｎは格子数である。

しかしながら、系を勝手に励起しても複雑なエネルギー分布を見るだけであり、可積分性についてはほとんど何も分からない。そこで、一つのモードだけを励起し、ある時間経過（この時間を誘導期間Ｔとよぶ）した後、他のモードに急激にエネルギーの分配が発生する、いわゆ

る誘導現象の有無を調べる。

初期条件と境界条件を

$$\varphi(i,0)=\sqrt{\frac{2}{N}}\ A\ \sin\frac{\pi i}{2},\quad \dot{\varphi}(i,0)=0,$$

$$\varphi(0,t)=\varphi(N,t)=0 \tag{10}$$

とする。ここで、Aは$j=N/2$，での$\phi_j(0)$の値であり、摂動の大きさを表す。

ウー・ヤン・モノポール解のまわりで，この摂動に対して誘導現象を調べる。N＝64とする。A＝1.0 の場合を図2に示す。誘導期間TとAの関係は図3の通りである。ある$A=A_c$の値以下で$1/T$がゼロになれば系は$A<A_c$で準周期的になることを意味する。ところが、結果は、この系には、A_cが存在せず常に誘導現象が起こることを示唆している。さらに、場の2点間の相関を調べるとエネルギー等分配が成立しており、この系が熱平衡状態になっていることが分かる。

エルゴティックな系は、必ずしもカオティックな系では無いので、リヤプノフ指数λを調べる。もしもλが正の一定値であれば系はカオティックである。結果を、図4に示す。この様な結果から、古典的ヤンミルズ場理論は、混合性をもった非可積分系でダイナミカルなカオスを示す系であることが分かる。

この結論は、Matinyan達の結論[3]とは異なる。彼らによれば、摂動Aが小さいときには系はレギュラーな相になると主張する。だが、この両者の結論の相違は誘導現象で説明できる。彼らは、複数のモードを同時に励起して分析をしたために誘導期間の存在を見落とした。さらに、図4から分かるようにtが小さいところでは、摂動が小さければリヤプノフ指数はほとんどゼロに見える。彼らは、これを論拠にしたのである。また、線形安定性の議論からもこのモノポール解近傍の位相空間が不安定である事が分かる。

2．ヤンミルズ・ヒッグス系

2－1．ヤンミルズ・ヒッグス古典力学：場が時間だけに依存する場合[4]

場が時間だけに依存する場合は、ヤンミルズ・ヒッグス古典力学として詳しく調べられている。そして、ヒッグス場の真空期待値がある値を越すとカオティックな状態からレギュラーな系に移る、一種の相転移に似た現象が起こる。ハミルトニアンは（5）に調和振動のポテンシャル$\gamma(x^2+y^2+z^2)/2$を付け加えたものになる。このγが二つの場の結合定数の比であり真空期待値に関係する。従って、γが大きいときに系が準可積分系になることが分かる。

2－2．古典的ヤンミルズ・ヒッグス場理論：場が時空間に依存する場合

この様なより一般的な状況で最も重要な解は、トフーフト・ポリヤコフ・モノポール解[5)]である。ヒッグス場に対するアンザッツを

$$\phi_a = \frac{r_a}{e r^2} h(r, t) \tag{11}$$

とし、ヒッグスポテンシャルを$V=\lambda(\vec{\phi}\cdot\vec{\phi}-a^2)^2/4$とすれば、運動方程式は

$$\xi^2(\partial_\tau^2 \varphi - \partial_\xi^2 \varphi) = -h^2 \varphi - \varphi(\varphi^2 - 1) \tag{12}$$

$$\xi^2(\partial_\tau^2 h - \partial_\xi^2 h) = -2\varphi^2 h - \kappa h(h^2 - \xi^2) \tag{13}$$

で与えられる。ここで、$\xi = aer$，$\tau = aet$，$\kappa = M_H^2/2M_W^2$である。

1－2の場合と同様にFermi-Pasta-Ulamの方法で解析する。摂動の強さAとリアプノフ指数σの結果を、図5に示す。Ac＝0.6-1.0より小さなAでσは零になり、系はレギュラーになる。この結果は、古典的ヤンミルズ場理論とは異なってこの系ではヒッグス場によって系がレギュラー化し、二相現れることを意味する。二相間の相違は、時間発展による場の配位空間での振舞や誘導現象に顕著に現れる。図6は、A＝0.1とA＝1.5におけるモード間のエネルギー交換のパターンである。この図から、明らかにA＝1.5で誘導現象が観測される。線形安定性の解析からも二相の存在は推測できる。二つの場の結合定数κとAの関係は、まだ分からない。

3．まとめ

時空間に依存したヤンミルズ場方程式のウー・ヤン・モノポール解は、誘導現象、相関、リヤプノフ指数の計算などから、ダイナミカルなカオスを示すことが分かった。この結論は、ヤンミルズ古典力学の結果と一致している。また、ヤンミルズ・ヒッグス系のトフーフト・ポリヤコフ・モノポール解では、ヒッグス場のためにレギュラー相が現れることが分かった。

ヤンミルズ場が、時空両方向にランダムに広がって無秩序状態に移って行く機構は、場のランダムな配位の発展を意味し、クォークの閉じ込め機構である面積則を説明できる可能性がある。

ヤンミルズ・ヒッグス系において、レギュラーな相とストカスティックな相の二相が存在し、一種の相転移に似た現象が起こるのは大変興味がある。また、この系をハミルトン系の時空カ

オスに対するモデルと見れば、モノポールのために非均一な空間でのカオス問題であり、新しい内容を含んでいる可能性がある。

参考文献

1) S. G. Matinyan, G. K. Savvidy and N. G. Ter-Arutunyan-Savvidy, Sov. Phys. JETP53(1981)421.

2) T. Kawabe and S. Ohta, Phys. Rev. D41(1990)1983.

3) S. G. Matinyan, E. B. Prokhorenko and G. K. Savvidy, JETP Lett. 44(1986)138; Nucl. Phys. B298(1988)414.

4) S. G. Matinyan, G. K. Savvidy and N. G. Ter-Arutunyan-Savvidy, JETP Lett. 34 (1981)590.

5) G.'tHooft, Nucl. Phys. B79(1974)276;
A. M. Polyakov, JETP Lett. 20(1974)194.

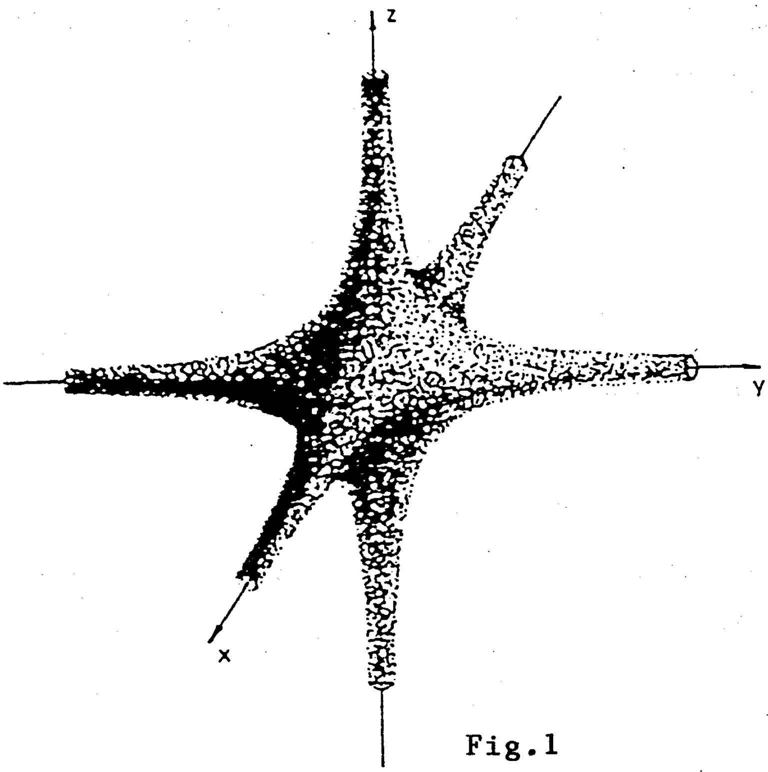

Fig.1

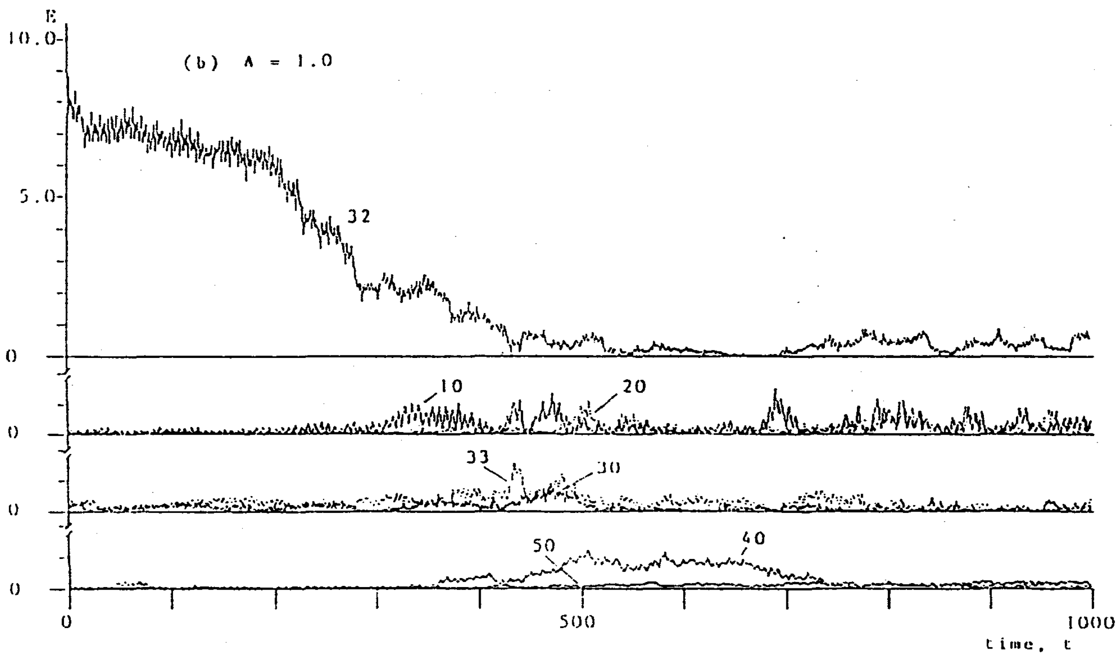

Fig.2

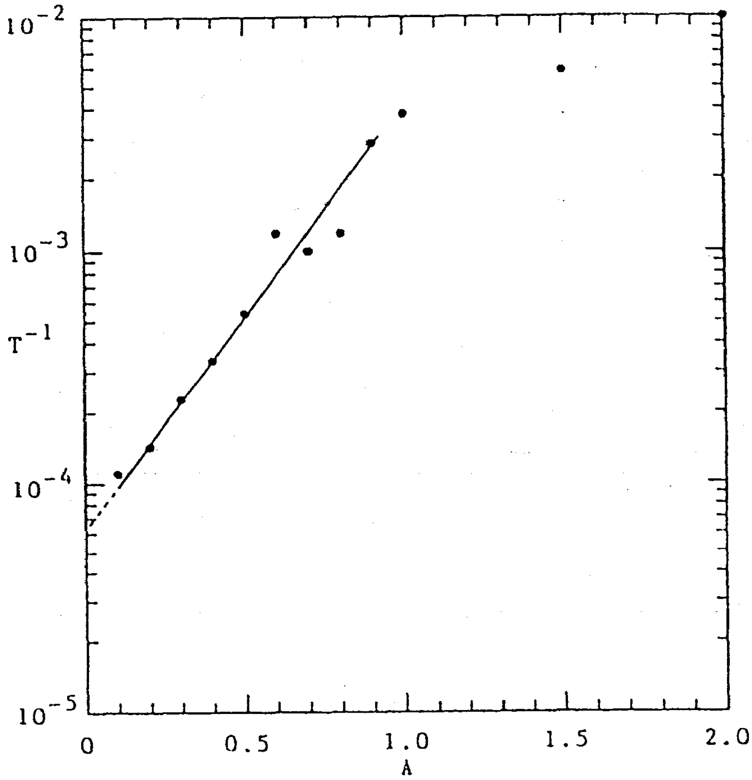
10^{-2}
10^{-3}
T^{-1}
10^{-4}
10^{-5}
0
0.5
1.0
1.5
2.0
A

Fig.3

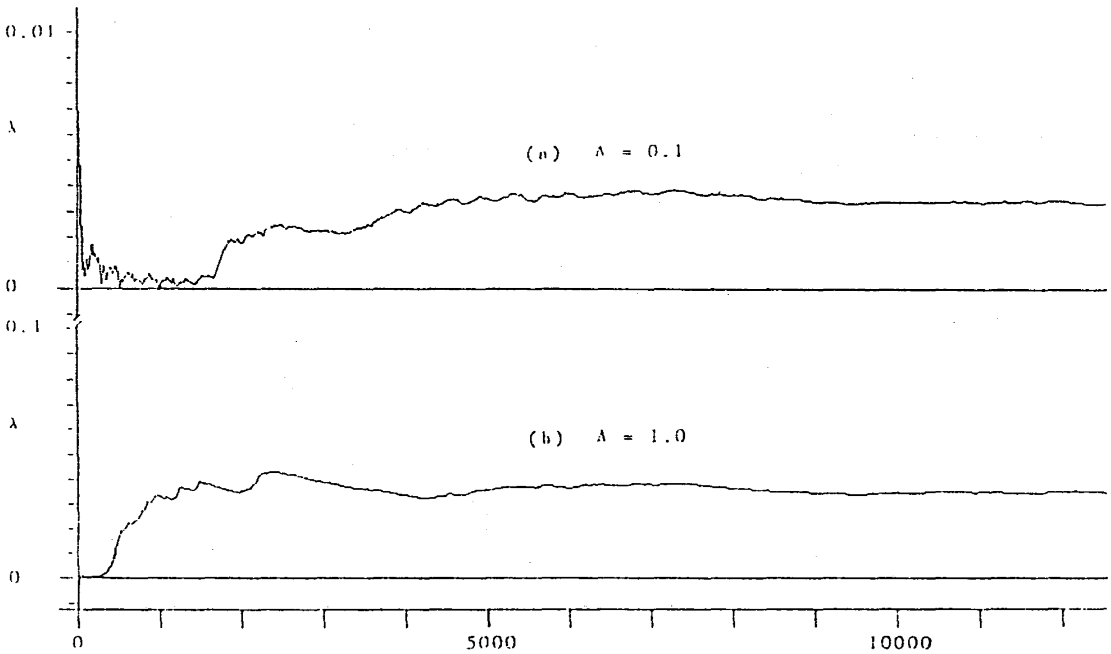
0.01
λ
(a) A = 0.1
0
0.1
λ
(b) A = 1.0
0
0
5000
10000
time, t

Fig.4

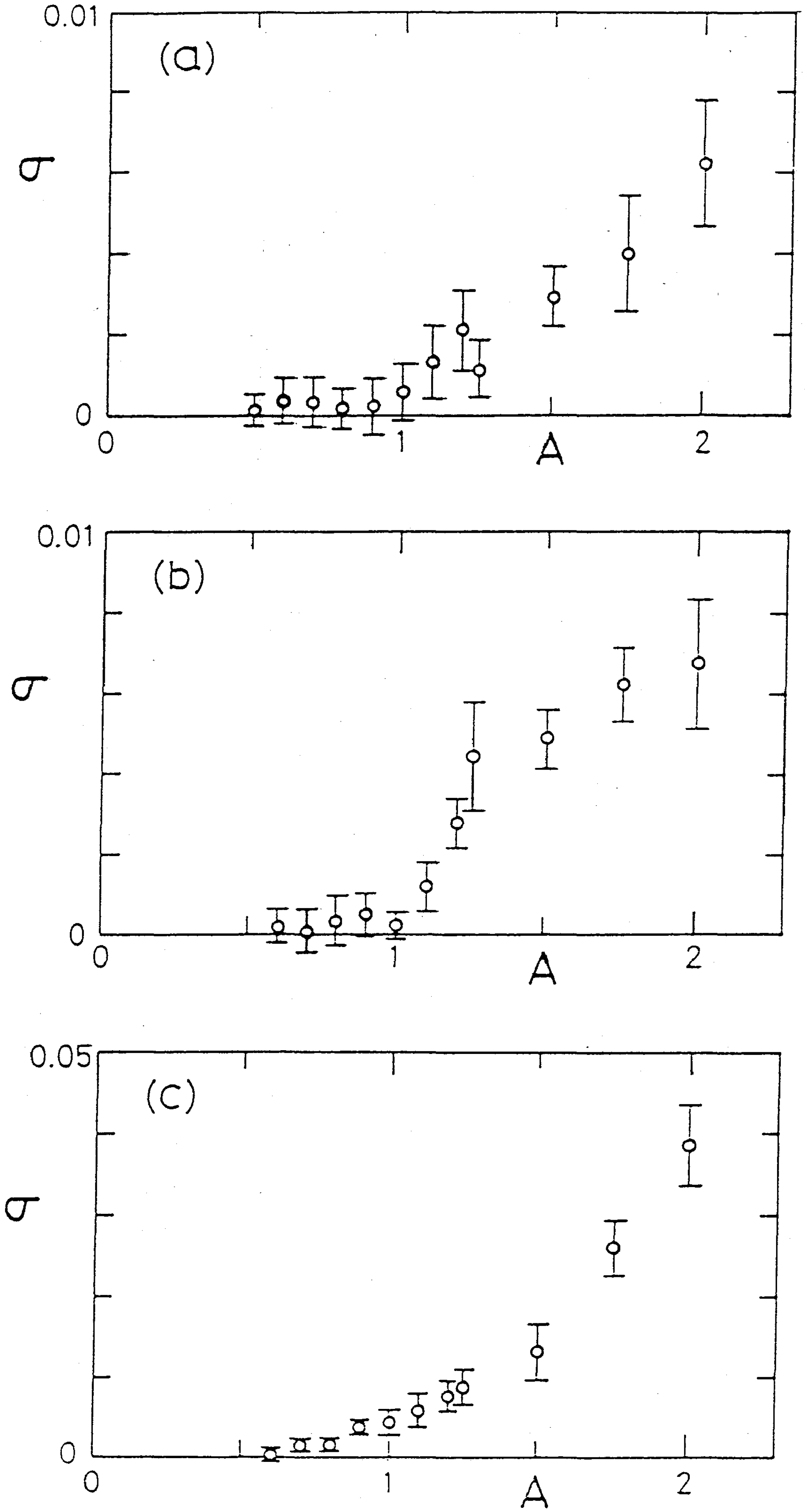

Fig.5